正標数の Berkovich 幾何

東京科学大学　理学院　数学系数学コース
山田 雄斗 (Yuto YAMADA) *

概要

Banach 環による幾何学として期待される Berkovich 幾何について定義を確認して, 有限体上の合同ゼータ関数との関連についても述べる.

1　導入

合同ゼータ関数の定義とトレースの関係について確認する. 有限体 $\mathbb{F}_q$ $(q = p^s)$ 上の代数多様体 X に対して, 代数閉包 $k := \overline{\mathbb{F}}_q$ への底変換を X_k とおく. X の**合同ゼータ関数**とは, 以下で定まる関数であった:

$$Z(X,t) := \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\#(X_k(\mathbb{F}_{q^n}))}{n} t^n\right).$$

一方で, X が滑らかな射影多様体であるときは Grothendieck-Lefshetz の跡公式 ([SGA5]) によって, 以下のような計算があった:

$$\#(X_k(\mathbb{F}_{q^n})) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Tr}((F_X^n)^* | H^i_{\mathrm{et}}(X_k, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)).$$

ただし, $H^i_{\mathrm{et}}(X_k, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は X_k の ℓ 進 étale コホモロジー $(\ell \neq p)$ であり, F_X は X_k の Frobenius 射である. この表示は ℓ 進 étale コホモロジーの発展の中でも, とくに Weil 予想 ([Wei49]) の進展に大きく寄与したが, これ以上は立ち入らない.

2　Berkovich モチーフ

ここでは, [Sch24] に沿って, Berkovich モチーフの理論を概観して, いくつかの例をみる.

定義 2.1 ([Sch24, Definition 2.1,2 & 10], Banach 環/体)**.** 環 R が **Banach** であるとは, R が写像 $|-|_R : R \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって, 以下の条件をみたすものが存在するということである:

1. $|0|_R = 0$, かつ, $|-1|_R \leq 1$ である.
2. 任意の元 $a, b \in R$ に対して, $|ab|_R \leq |a|_R |b|_R$ が成り立つ.
3. 任意の元 $a, b \in R$ に対して, $|a+b|_R \leq |a|_R + |b|_R$ が成り立つ.

* E-mail:yamada.y.f243@m.isct.ac.jp

4. R は, $|-|_R$ によって定まる位相に関して完備である.

また, Banach 環 $(K, |-|_K)$ が **Banach 体**であるとは, K が体であり, 任意の元 $a, b \in K$ に対して $|ab|_K = |a|_K |b|_K$ が成り立つことをいう.

更に, ノルム保存写像 (つまり, 任意の元 $a \in R$ に対して, $|f(a)|_S \leq |a|_R$ を満たす環準同型 $f : R \to S$ を射とする Banach 環の圏を Ban とおく. ♦

注意 2.2 ((非)archimedes 的 Banach 体)**.** Gelfand–Mazur の定理 ([Gel41], [Maz38]) より, $|2|_K > 1$ を満たす Banach 体 $(K, |-|_K)$(つまり, **archimedes 的** Banach 体) は, $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ に通常の (Euclid) ノルム $|-|$ の冪 $|-|^\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ を入れたものと同型である. 一方, **冪乗的**ノルム (つまり, 任意の元 $a \in R$ と任意の整数 n に対して $|a^n|_R = |a|_R^n$ が成り立つノルム) をもつ Banach 環 R が**非 archimedes 的**であるとは, 超距離三角不等式を満たすこと (同値な条件として $|2|_R < 1$ が成り立つ) ことをいう ([Sch24, Definition 2.5 & Proposition 2.6] 参照). ♦

例 2.3 (自明ノルム)**.** 任意の環は 0 を $0 \in \mathbb{R}$ に送り, それ以外は $1 \in \mathbb{R}$ に送るようなノルム (と離散位相) で以て, Banach 環と見做すことができる. ♦

定義 2.4 ([Sch24, Definition 2.13], Berkovich スペクトラム)**.** Banach 環 R の **Berkovich スペクトル** $\mathcal{M}(R)$ とは, 以下の条件を満たす写像 $\|-\| : R \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 全体のなす $\prod_{a \in R} [0, |a|_R]$ の閉部分空間である:

1. $\|0\| = 0$, かつ, $\|1\| = 1$ である.
2. 任意の元 $a \in R$ に対して, $\|a\| \leq |a|_R$ が成り立つ.
3. 任意の元 $a, b \in R$ に対して, $\|ab\| = \|a\|_R \|b\|_R$ が成り立つ.
4. 任意の元 $a, b \in R$ に対して, $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ が成り立つ.

任意の点 $x \in \mathcal{M}(R)$(対応するノルムを $\|-\|_x$ と書く) に対して, $K(x)$ を Banach 環 $(\widehat{R}, \|-\|_x)$(ただし, $\widehat{R}$ は $R/\ker(\|-\|_x)$ の $\|-\|_x$ による完備化) の分数体の完備化と定める ($K(x)$ は Banach 体となることに注意する). ♦

定義 2.5 ((強) 完全不連結性)**.** Banach 環 $(R, |-|_R)$ に対して, 以下を定める:

1. ([Sch24, Definition 2.17]) 任意の点 $x \in \mathcal{M}(R)$ において対応する Banach 体 $K(x)$ が非離散的であるとき, R は**解析的**であるという.
2. ([Sch24, Definition 2.20 & Proposition 2.21]) 任意の元 $a \in R$ に対して,
$$|a|_R = \sup\{\|a\|_x \mid x \in \mathcal{M}(R)\} = \lim[n \to \infty] |a^n|_R^{1/n}$$
が成り立つとき, R は**一様**である (同値な条件として, $|-|_R$ が冪乗的である) という.
3. ([Sch24, Definition 3.10]) R が解析的, かつ, 一様であり, また $\mathcal{M}(R)$ が副有限であるとき, R は**完全不連結**であるという.
4. ([Sch24, Definition 3.10]) R が完全不連結であり, 任意の点 $x \in \mathcal{M}(R)$ に対して, 対応する Banach 体 $K(x)$ が代数的閉体であるとき, R は**強完全不連結** であるという.

♦

例 2.6 ([Sch24, Subsection 2.4], 非 archimede 的単位円板)**.** 代数閉となる非 archimedes 的 Banach 体 C に対する“単位円板”である $\mathcal{M}(C\langle T\rangle_1)$ の具体的な点を列挙する (ただし, $C\langle T\rangle_1$ は $|T|\leq 1$ となる変数 T を付加して得られる一様 Banach C 代数を表す). Bruhat-Tits 樹木をみることで, $\mathcal{M}(C\langle T\rangle_1)$ は, 以下のような表示ももつ:

$$\{(x_a)_{a\in\mathcal{O}_C} \mid x_a \leq \max\{x_b, |a-b|_C\}, |a-b|_C \leq \max\{a,b\} \quad \text{for all } a,b\in\mathcal{O}_C\}.$$

これらの点は, 以下のように大別できる:

1. $x_a = 0$ となる a が存在するとき, $T \longmapsto a$ を考えることで, $K(x)$ は C 自身となる.
2. 最小の x_a に対して, $x_a = |t|_C$ となる $t\in C$ が存在するとき, $K(x)$ は $C(T)$ の x に関する完備化となる. これは, 付値群は C と同じ付値群であり, 剰余体は C の剰余体の純超越拡大体である.
3. 最小の x_a に対して, $x_a \notin |C|$ となるとき, $K(x)$ は $C(T)$ の x に関する完備化となる. これは, 付値群は $|C^\times|\times x_a^{\mathbb{Z}}$ であり, 剰余体は C の剰余体である. ただし, $|C| = \mathbb{R}_{\geq 0}$ であるときは, このような点が生じないことに注意する.
4. 最小値が存在しないとき, 極小値への極限 $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots$ を取ることで, $K(x)$ は $K(x)$ は $C(T)$ の x に関する完備化となる. これは, 付値群は C と同じ付値群であり, 剰余体は C の剰余体である. ただし, C が球的完備である (つまり, 任意の K の減少列の共通部分が非空である) ときは, このような点が生じない事に注意する.

「モチーフ」を解析するうえで有用な位相として,「arc 位相」を定義する.

定義 2.7 (arc 景)**.** 以下の概念を定める:

1. ([Sch24, Definition 3.1]) Ban における射の族 $\{S_i \to R\}_{i\in I}$ が **arc 被覆**であるとは, 有限部分集合 $J\subset I$ が存在して, 誘導される写像

$$\bigsqcup_{j\in J}\mathcal{M}(S_j) \to \mathcal{M}(R)$$

が全射となることをいう.
2. ([Sch24, Proposition 3.3]) arc 被覆により与えられる (有限な)Grothendieck 位相を入れた景 $(\mathrm{Ban}^{\mathrm{op}}, \mathrm{arc})$ を **arc 景**という.
3. Banach 環 R に対して, $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R)$ を米田埋込 $S \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ban}}(R,S)$ の arc 層化として定める.
4. 値を Ani にとる $(\mathrm{Ban}^{\mathrm{op}}, \mathrm{arc})$ 上の層 ($\mathrm{Shv}_{\mathrm{arc}}(\mathrm{Ban}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ani})$ の対象) を **arc スタック** という. また, ある (小さい) 余極限 $\mathrm{colim}(\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R))$ で表現される arc スタックを**小**であるという.

♦

例 2.8 ([Sch24, Example 3.6 & Proposition 3.11], Stone-Čech 被覆)**.** Banach 環 R に対して, Gelfand 変換 $R \to \prod^{\mathrm{Ban}}_{x\in\mathcal{M}(R)} K(x) =: S$ をみる. $\mathcal{M}(S)$ は (集合としての)$\mathcal{M}(R)$ の Stone-Čech コンパクト化と同相である. 更に, 標準的な射 $\mathcal{M}(S)\to\mathcal{M}(R)$ は arc 被覆となっていて, ある種の圏論的な操作である Stone-Čech コンパクト化が Berkovich 空間の言葉で表現できている. ♦

まず, arc 層に関するいくつかの概念を定義する.

定義 2.9 (有限/球不変/(効果的) モチヴィック層)**.** 小 arc スタック X に対して, 以下の概念と ∞ 圏を定める:

1. ([Sch24, Definition 4.10 & Proposition 4.12]) X 上の**有限層**のなす ∞ 圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{fin}}(X)$ を, 有限積およびフィルター余極限と可換な関手のなす $\mathrm{Fun}(\mathrm{TD}^{\mathrm{st}}_{/X}, \mathcal{D}(\mathbb{Z}))$ の充満部分 ∞ 圏として定める. ただし, $\mathrm{TD}^{\mathrm{st}}$ とは強完全不連結な Banach 環のなす Ban の充満部分圏である.
2. ([Sch24, Definition 5.1]) arc 層 $F \in \mathcal{D}(X_{\mathrm{arc}})$ が**球不変**であるとは, X 上の任意の Banach 環 R に対して, R と $R\langle T\rangle_1$ における値が一致することをいう. ただし, $\mathcal{D}(X_{\mathrm{arc}})$ とは, 値を $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ にとる $(\mathrm{Ban}^{\mathrm{op}}_{/X}, \mathrm{arc})$ 上の層であり, その対象を **arc 層**という.
3. ([Sch24, Definition 5.2 & Proposition 5.8]) X 上の**効果的モチヴィック層** の ∞ 圏 $\mathcal{D}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(X)$ を, 球不変な層のなす $\mathcal{D}_{\mathrm{fin}}(X)$ の充満部分 ∞ 圏として定める. 同値な定義として, 自己関手 $L : \mathcal{D}_{\mathrm{fin}}(X) \ni K \longmapsto (R \longmapsto \mathrm{colim}_{n\in\Delta^{\mathrm{op}}} K(R\langle\Delta^n\rangle)) \in \mathcal{D}_{\mathrm{fin}}(X)$ の本質的像として与えられる. ただし, $R\langle\Delta^n\rangle$ は, n 個の変数を付加した Banach R 代数 $R\langle T_1, \ldots, T_n\rangle_{1,\ldots,1}$ を表す.
4. ([Sch24, Definition 5.18]) **Tate 捻り** $\mathbb{Z}(1)$ を, arc 層 $(\mathbb{Z}_{\mathrm{mot}}[\mathbb{G}_m]/\mathbb{Z}_{\mathrm{mot}}[*])[-1]$ によって定める. ただし, $\mathbb{Z}_{\mathrm{mot}}[-]$ は [Sch24, Proposition 5.12 & Theorem 6.1] で論じられている自由モチヴィック層を表す. 非 archimedes 的な状況で議論する場合, これは arc 層 $(\mathbb{G}_m/(1+\mathcal{O}_{<1}))[-1]$ ($\mathcal{O}_{<1}$ は層 $R \longmapsto R_{<1}$ を表す:[Sch24, Definition 5.15 & Proposition 5.17]) と同値であることに注意する. また, $\mathbb{C}$ 上で議論をするときには $\mathbb{Z}$ と一致する.
5. ([Sch24, Definition 9.1]) **モチヴィック層**の ∞ 圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(X)$ を $\mathcal{D}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(X)[\mathbb{Z}(1)^{\otimes -1}]$ として定める. 任意の負の整数 $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ に対して, $\mathbb{Z}(-n)$ はモチヴィック層の中で $(\mathbb{Z}(1)^{\otimes -1})^{\otimes(-n)}$ として自然に定義される.

♦

例 2.10 (Banach $\mathbb{C}$ 代数)**.** Gelfand 対応 ([Gel41]) により, Banach $\mathbb{C}$ 代数上の arc 景と, 有限族による全射による Grothendieck 位相を備えたコンパクト Hausdorff 空間の景は, それらの ∞ トポスが一致する. また [Sch24, Theorem 4.14] により, 任意の Banach $\mathbb{C}$ 代数 R であって, $\mathcal{M}(R)$ が距離付け可能であるものに対して, 次の ∞ 圏の同値が存在する: $\mathcal{D}(\mathcal{M}(R)) \simeq \mathcal{D}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R))$. ♦

例 2.11 (幾何学的点)**.** K が代数的閉体であるとき, $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(K)$ には以下のようである:

1. 例 2.10 と同様に, $K = \mathbb{C}$ のとき $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(K) \simeq \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ である.
2. ([Sch24, Proposition 10.1]) K が非離散的混標数のとき, $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(K)$ はコンパクト生成であり, 単位対象はコンパクトで, コンパクト対象は双対化可能である.
3. ([Sch24, Proposition 10.1]) K が非離散的等標数のときも, $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(K)$ はコンパクト生成であり, 単位対象はコンパクトで, コンパクト対象は双対化可能である. また, 剰余体 k の分裂 $k \to K$ を固定すると, 以下のコンパクト対象による系を生成系として取ることができる:
$$\{\mathbb{Z}_{\mathrm{mot}}[X_K](-j) \mid X \text{ は } k \text{ 上の滑らかな射影的代数多様体であり, } j \text{ は正整数である.}\}.$$
4. ([Sch24, Theorem 11.1]) K が離散的であるとき, $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(K)$ は, 以下の双対化可能な対象による系を生成系として取ることができる:
$$\{\mathbb{Z}_{\mathrm{mot}}[X](-j) \mid X \text{ は } k \text{ 上の滑らかな射影的代数多様体であり, } j \text{ は整数である.}\}.$$

♦

注意 2.12 (ℓ 進実現)**.** 例 2.11 を用いて, 関心のある $k = \overline{\mathbb{F}}_{p^s}$(有限体 $\mathbb{F}_{p^s}$ の代数閉包) をとると, [Sch24, Theorem 11.1] により, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(k)}(\mathbb{Z}_{\mathrm{mot}}[X](-j), \mathbb{Z})$ は古典的かつ具体的に記述できる: p とは互いに素な指数に関する副有限完備化の後には $R\Gamma(X_{\text{ét}}, \widehat{\mathbb{Z}}^{(p)}(j))$ と同型になる. ただし, $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p)}$ は $\varprojlim_{p\nmid n}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ を表す. とくに, $j = 0$ に対して, 素数 $\ell \neq p$ に関する副有限完備化の後に, $\otimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を施すことで, 古典的な ℓ 進コホモロジー $R\Gamma(X_{\text{ét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を得る. この ℓ 進実現を $\Phi_\ell : \mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(k) \to \mathcal{D}(\mathrm{Spec}(k)_{\text{ét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を得る. ♦

3 圏論的トレース

この節では, [CC, Lecture XIV & XV] や [HSS17, Section 2 & 3] に従って, 圏論的トレースを概説する.

記号 3.1. 表示可能な対称モノイダル安定 ∞ 圏 C を固定する. M を, 単位対象 1 をもつ $(\infty, 2)$ 圏 $\mathrm{Mod}_C(\mathrm{Pr}^L)$ とおく. ♦

定義 3.2 (双対化可能対象)**.** X を C 上の線型 ∞ 圏 (つまり, $X \in M$) とする. X が**双対化可能**であるとは, M 上の対象 X' と M 上の射 $\mathrm{coev_X} : 1 \to X' \otimes X, \mathrm{ev_X} : X \otimes X' \to 1$ であって, 以下の合成がともに恒等射と一致するということである:

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev_X}} X \otimes X' \otimes X \xrightarrow{\mathrm{ev_X}\otimes\mathrm{id}} X, \quad X' \xrightarrow{\mathrm{coev_X}\otimes\mathrm{id}} X' \otimes X \otimes X' \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev_X}} X'.$$

X' を **(X の) 双対**といい, $X^\vee$ とも表す. ♦

例 3.3 (双対可能性)**.** 例 2.3 より, 体 k 上の代数多様体 X は小 arc スタック X_{arc} と見做すことができる. また, モチヴィック層 $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(X_{\mathrm{arc}})$ は $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(k)$ 上双対化可能である. というのも, 外部テンソル積 $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(X_{\mathrm{arc}}) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(k)} \mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(X_{\mathrm{arc}}) \to \mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(X_{\mathrm{arc}} \times_k X_{\mathrm{arc}})$ が圏同値である (これは [CC, Lemma 14.15] の形式的な議論より従う) ので, [Kes25, Proposition 3.15] より,$\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(X_{\mathrm{arc}})$ は $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(k)$ 上自己双対であることが従うからである. ただし, ここでは, [Sch24, Theorem 9.2] を用いた三つ組 (E, E, isom)(ただし, E は有限コホモロジー次元 ([Sch24, Definition 4.17]) を表す) による 6-functor formalism([HM24] 参照) などで議論されている豊富な理論を用いているが, ここでは立ち入らない. ♦

定義 3.4 (トレース関手)**.** M の双対化可能対象 $X \in M$ をとる. 自己準同型 $f : X \to X$ に対して, その **トレース関手** $\mathrm{tr}(f|X)$ を, M における 1 の自己準同型として

$$1 \xrightarrow{\mathrm{coev}_X} X \otimes X^\vee \xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}} X \otimes X^\vee \simeq X^\vee \otimes X \xrightarrow{\mathrm{ev}_X} 1$$

と定義する. この構成により, 関手 $\mathrm{tr}(-|X) : \mathrm{End}_M(X) \to \mathrm{End}_M(1) \simeq C$ が得られる. この構成は対象に関しても関手的である ([HSS17, Definition 2.2] も参照). ♦

注意 3.5 ($\mathrm{tr}(-|-)$ の性質)**.** トレース関手は以下の性質を満たす:

1. 任意の双対化可能対象 $X, Y \in M$ と自己準同型 $f : X \to X, g : Y \to Y$ に対して,

$$\mathrm{tr}(f \otimes g | X \otimes Y) \simeq \mathrm{tr}(f|X) \otimes \mathrm{tr}(g|Y)$$

が成り立つ.
2. 任意の双対化可能対象 $X, Y \in M$ および射 $f : X \to Y, g : Y \to X$ に対して,

$$\mathrm{tr}(gf|X) \simeq \mathrm{tr}(fg|Y)$$

が成り立つ.

♦

注意 3.6 ($\#_f$ の形式的議論)**.** C の自己準同型 f を一つとる. 任意の双対化可能対象 $X \in M$ に対して, f_X を f の底変換として得られる自己準同型とする. X の自己射 F を取り, その右随伴関手を G とおくと, 以下のような射が存在する:

$$\mathrm{tr}(f|F) : \mathrm{tr}(f_X|X) \to \mathrm{tr}(f_X GF|X) \simeq \mathrm{tr}(F f_X G|Y) \to \mathrm{tr}(f_Y FG|Y) \to \mathrm{tr}(f_Y|Y).$$

ただし, 最初と最後の矢は随伴から誘導され, 中間の同型は注意 3.5(2) から従い, 3 番目の矢は自然変換 $F f_X \Rightarrow f_Y G$ から誘導される ([CC, Lecture XV] の議論も参照). 例として $Y = C$ の場合を考える. X の任意の対象 P に対して, $- \otimes_C P : C \to X$ という関手と, その右随伴 $\underline{\mathrm{Hom}}_C(P, -)$ を得る. 上記の議論から, $\mathrm{tr}(f|C) \to \mathrm{tr}(f_X|X)$ という射が定まる.

最後に, $\#_{f,X}(P) \in \pi_0(\mathrm{tr}(f|C))$ を, $1 \in \pi_0(\mathrm{tr}(f|C))$ の像として $\pi_0(\mathrm{tr}(f|C)) \to \pi_0(\mathrm{tr}(f_X|X))$ を経由して定める. この構成は関手的であり, 写像

$$\#_{f,X} : K_0(X) \to \pi_0(\mathrm{tr}(f_X|X))$$

を与える.[CC, Proposition 15.1] における抽象的議論の類似から, この写像は“加法的”である. ♦

4 主定理

今までの準備の下で, [Kah24, Subsection 2.C] の類似を行う. 具体的には, 有限体 $\mathbb{F}_q$ $(q = p^s)$ の代数閉包を k として, 注意 3.6 の f を k の Frobenius 射, C を $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(k)$, X を射影的かつ滑らかな $\mathbb{F}_q$ 上の多様体 X に対する $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}((X_k)_{\mathrm{arc}})$ とする (例 3.3). このとき, [CC, Proposition 15.4] と同様な形式的な議論により, 以下の可換図式が存在することに注意する:

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}((X_k)_{\mathrm{arc}})) \arrow[r, "\#_{F,X}"] \arrow[d, "K_0(\pi_*)"'] & \pi_0(\mathrm{tr}(f_X|X)) \arrow[d, "\pi_0(\mathrm{tr}(F|\pi_*))"] \\
K_0(\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(k)) \arrow[r, "\#_F"'] & \pi_0(\mathrm{tr}(f|k)).
\end{tikzcd}$$

ただし, 適当に記号は省略しており, 構造から誘導される射 $X_k \to \mathrm{Spec}(k)$ を π とおく.

定義 4.1 (Berkovich 合同ゼータ関数)**.** 任意の正整数 $n \in \mathbb{N}^+$ に対して, $\#_n(X) := (\Phi_\ell \circ \pi_0(\mathrm{tr}(F|\pi_*)) \circ \#_{F,X})(1_X)$ とおく (ただし, 1_X は $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}((X_k)_{\mathrm{arc}})$ の単位対象である). この記号の下で,

$$\widetilde{Z}(X,t) := \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\#_n(X)}{n} t^n\right)$$

とおく. ここで, ℓ 進 étale コホモロジーの計算により, 任意の正整数 $n \in \mathbb{N}^+$ に対して, $\#_n(X) \in \mathbb{C}$ であることに注意する. ♦

注意 2.12 と Grothendieck-Lefshetz の跡公式 ([SGA5]) を組み合わせることで, 以下の主定理を得る.

定理 4.2 (古典的定義との比較)**.** 任意の正整数 $n \in \mathbb{N}^+$ に対して, $\#_n(X) = \#(X_k(\mathbb{F}_{q^n}))$ である. とくに, 関数として $\widetilde{Z}(X,t) = Z(X,t)$ である.

参考文献

[CC] Dustin Clausen and Peter Scholze, *Condensed Mathematics and Complex Geometry*, available at website (`https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Complex.pdf`), (2022).

[Gel41] Israil M. Gelfand, *Normierte Ringe*, Sb. Math., **51**:1, 3-24, (1941).

[SGA5] Alexsander Grothendieck et al., *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1965-66 - Cohomologie l-adique et Fonctions L - (SGA 5)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589. Berlin; New York: Springer-Verlag (1977).

[HM24] Claudius Heyer and Lucas Mann, *6-Functor Formalisms and Smooth Representations*, preprint(`https://arxiv.org/abs/2410.13038`), (2024).

[HSS17] Marc Hoyois, Sarah Scherotzke, and Nicolo Sibilla, *Higher traces, noncommutative motives, and the categorified chern character*, Advances in Mathematics **309** (2017), 97-154.

[Kah24] Bruno Kahn, *Zeta and L functions of Voevodsky motives*, preprint(`https://arxiv.org/abs/2412.08437`), (2024).

[Kes25] Youshua Kesting, *Categorical Künneth formulas for analytic stacks*, preprint(`https://arxiv.org/abs/2507.08566`), (2025).

[Maz38] Stanisław M. Mazur, *Sur les anneaux linéaires*, C. R. Acad. Sci., Paris, **207**, 1025-1027 (1938).

[Sch24] Peter Scholze, *Berkovich motives*, preprint(`https://arxiv.org/abs/2412.03382`), (2024).

[Wei49] André Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 497–508.